Über die Nützlichkeit von unstetigen Funktionen in der Analysis*

Leonhard Euler

§**1** Was in der Analysis über Funktionen, oder über eine gewisse Variable irgendwie bestimmte Größen, gelehrt zu werden pflegt, wird nur auf die Funktionen beschränkt, die als stetig bezeichnet werden, und deren Bildung nach einer bestimmten Vorschrift geschieht. Aus der Lehre von Kurven wird dies besonders illustriert, wo die Ordinaten, sofern sie über Abszissen definiert sind, die Gestalt der Funktionen hervorbringen, sodass die Natur aller Funktionen in vortrefflicher Weise mit Kurven dargestellt werden kann. Wie auch immer also die Größe y über x definiert wird, oder was für eine Funktion auch immer y von x war, es kann immer eine Kurve beschrieben werden, einer beliebigen Abszisse x von welcher die Ordinate y zukommt, und die Kurve wird verstanden, die Natur jener Funktion passend darzustellen. Daher werden auch umgekehrt nach Vorlage einer beliebigen Kurve ihre Ordinaten gewisse Funktionen der Abszissen darbieten, deren Natur in der Natur der Kurve enthalten ist, während natürlich einer jeden Abszisse eine bestimmte Ordinate entspricht, der Wert von dieser wird aber mit Recht als gewisse Funktion der Abszisse angesehen, und wannimmer die Ordinate entweder imaginär wird oder gleichzeitig mehrere Werte annimmt, wird diese Varietät überdeutlich aus der Natur der Funktion erkannt.

*Originaltitel: "De usu functionum discontinuarum in analysi", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11* (1767, geschrieben 1762): pp. 67–102, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 23, pp. 74 – 91, Eneström Nummer E322, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Nun ist aber allbekannt, dass in der höheren Geometrie keine anderen Kurven betrachtet zu werden pflegen, außer denen, deren Natur – mit einer gewissen Relation zwischen den Koordinaten ausgedrückt – mit einer bestimmten Gleichung bestimmt wird, sodass all ihre Punkte über dieselbe Gleichung wie nach einem Gesetz bestimmt werden. Weil dieses Gesetz verstanden wird, das Prinzip der Stetigkeit in sich zum umfassen, nach Welchem alle Teile der Kurve mit so engen Ketten aneinander gebunden sind, dass in jenen bei vorhandenem Stetigkeitkeitsnexus keine Änderung stattfinden kann, werden diese Kurven deswegen stetig genannt, und es ist nicht von Belang, ob die Gleichung, welche die Natur jener enthält, algebraisch ist oder transzendent, ob sie bekannt ist oder immer noch unbekannt, solange wir verstehen, dass eine gewisse Gleichung gegeben ist, mit welcher die Natur von Kurven von dieser Art ausgedrückt wird. An dieser Stelle wird nicht die Stetigkeit des Verlaufs betrachtet, welchem die Zweige der Kurven folgen; so wie die zwei konjugierten Äste genauso eine stetige Kurve festlegen wie die Parabel oder die Ellipse, auch wenn ihre beiden Äste voneinander vollkommen getrennt sind. Denn dieses Grundes wegen wird diesen getrennten Hyperbelästen auch die Stetigkeit zugeschrieben, weil beide in ein und derselben Gleichung enthalten sind, und aus ihr gebildet werden können. Und aus dieser Quelle, die für gewöhnlich sehr vage über das Kontinuitätsgesetz auseinander gesetzt zu werden pflegt, wäre es ratsam, alles zu deuten und feste Bedeutungen zuzuschreiben.

§3 Nachdem also das Kriterium für Stetigkeit aufgestellt worden ist, ist von selbst klar, was eine unstetige Funktion ist, oder eine ohne das Gesetz der Kontinuität: Denn alle über keine bestimmte Gleichung definierte Kurve, von welcher Art freihändig gezeichnete bezeichnet zu werden pflegen, geben solche unstetigen Funktionen an die Hand, weil sich ja bei ihnen die Werte der Ordinaten nach keiner festen Vorschrift aus den Abszissen bestimmen lassen. Kurven von dieser Art, sofern sie der oben definieren Art von Stetigkeit nicht entgegenstehen, werden für gewöhnlich mechanische, passender aber unstetige, oder von Gesetz der Stetigkeit freie Kurven genannt, und das nicht, weil deren Stücke nicht miteinander zusammenhängen, sondern weil sie mit keiner bestimmten Gleichung definiert werden. Also, welcher Verlauf auch immer mit freier Hand auf einer Karte gezeichnet wird, auch wenn er ein durchgängiger ist, ist er dennoch gemäß dieser Definition für unstetig zu halten, weil es freilich niemals passieren wird, dass ein Verlauf von dieser Art in einer bestimmten Gleichung enthalten ist. Und dazu sollten auch die für gewöhnlich als gemischt bezeichneten Kurven gezählt werden, wannimmer die Teile, von verschiedenen Kurven entnommen, miteinander verbunden werden, oder auch die Teile einer Kurve auf eine andere Weise zusammengefügt werden. So wird der aus lediglich geraden Linien bestehende Umfang eines Polygons sich gleichermaßen hierhin erstrecken wie die aus Geraden und Kreisbogen oder irgendwelchen anderen Kurven gebildeten Kurven. Denn obgleich hier jedweder Anteil in einer bestimmten Gleichung enthalten ist, kann dennoch für einen sicheren Verlauf nicht eine einzige Gleichung, worin der Charakter der Stetigkeit festzulegen ist, dargeboten werden, weshalb alle Verläufe von dieser Art für unstetige Kurven zu halten sind, genauso wie die, die freihändig gezeichnet sind.

§4 Dass nun allen unstetigen Linien und Funktion von dieser Art in der geometrischen Analysis kein Raum eingeräumt wird, ist freilich per se offenkundig, weil diese ganze Betrachtung im Untersuchen der Eigenschaften der Linien, die betrachtet werden, eingenommen ist, welche Aufgabe freilich in keiner Weise in Angriff genommen werden könnte, wenn die Natur der Linien nicht in einem gewissen Gesetz oder einer gewissen Gleichung enthalten wäre. Daher haben die meisten Geometer in dieser Weise motiviert nicht bezweifelt, alle unstetigen Linien und Funktionen, so aus der der Geometrie wie aus der ganzen Analysis heraus vollkommen aufzulisten und zu den Objekten, von welchen diese Wissenschaft Abstand nimmt, zu verbannen. Dieses Urteil hat gewiss der hoch geehrte D' LAMBERT öffentlich kundgetan, nachdem ich die Bewegung von schwingenden Saiten so im Allgemeinen bestimmt hatte, dass sich die Lösung auf alle Bewegungen und Formen, welche der Saite am Anfang aufgeprägt worden waren, erstreckte. Denn bald hat dieser höchst erhabene Herr mit entgegnet, dass die Bewegung überhaupt nicht bestimmt werden kann, wenn die der Saite anfangs aufgeprägt Gestalt nicht stetig war und nicht in einer bestimmten Gleichung erfasst war; wenn dies nicht passiert und die Ausgangsform der Saite unstetig war, dass sich dann die Bestimmung der Bewegung in keiner Weise auf die Analysis bezieht, und es sogar ein Unrecht ist, jene ausfindig machen zu wollen. Diesem Einwand bin ich freilich zur Genüge entgegen getreten, und neulich hat der hoch geehrte *Lagrange* in den ACTIS TAURINENSIBUS meine Lösung so stringent untermauert, dass keinem Zweifel ein weiterer Raum gelassen wird.

§5 Hier entsteht also die Frage von größter Bedeutung, was über die unstetigen Funktionen, oder ohne ein bestimmtes Gesetz beschriebene Linien, zu urteilen ist, und ob und inwiefern jenen in der Analysis ein Platz eingeräumt werden kann. In jenem erwähnten Problem besteht gewiss kein Zweifel, dass die Saite, die anfangs so gespannt worden ist, dass ihre Form in keiner einzigen Gleichung erfasst werden kann, eine Bewegung ausführen wird, und während ihrer Dauer in den einzelnen Momenten eine gewisse Form haben und Bewegung vollführen wird, deren Bestimmung vernünftigerweise zur Analysis und der Bewegungslehre zu zählen ist, ob die unserer Erkenntnis gesetzten Grenzen für die Lösung dieser Frage nun hinreichen oder nicht. In jedem der beiden Fälle wäre die Frage nämlich immer unserer ganzen Aufmerksamkeit würdig, und weil sie von Größen handelt, ist sie anzusehen sich gewiss auf die Analysis zu beziehen; und es wird hier nicht gefragt, wie weit unser Scharfsinn reicht, weil kaum jemanden unter den Geometern gibt, der nicht öfter bei seine Kräften übersteigenden Fragen verzweifelt ist. Also ist es keinesfalls als ein Unrecht anzusehen, Fragen dieser Art anzugehen; ja es ist sogar ein umso größerer Eifer für sie aufzubringen. Nachdem ich also alle Schwierigkeiten sorgfältig betrachtet hatte, wage ich immer noch zu versichern, dass sich meine Lösung des im weitesten Sinne aufgefassten Problems über schwingende Saiten richtig verhält, und in ihr mit glücklichem Erfolg den unstetigen Funktionen Rechnung getragen worden ist. Ich erkenne aber auch an, dass dieses Problem zu einem noch völlig unentwickelten Zweig der Analysis zu rechnen ist, das Wesen und Natur welches Zweigs darin besteht, dass er auch notwendig unstetige Funktionen in sich umfasst.

§6 Um diesen Streit beizulegen, bemerke ich, dass weder in der gemeinen Algebra noch in dem Teil der Analysis des Unendlichen, welcher bisher hauptsächlich behandelt worden ist, unstetige Funktionen zugelassen werden können. Aber die Analysis des Unendlichen ist zu beurteilen sich um vieles weiter zu erstrecken und auch Anteile von solcher Art zu umfassen, welche vor unstetigen Funktionen nicht nur nicht zurückweichen, sondern sie sogar so in ihrer Natur beinhalten, dass kein sie darauf beziehendes Problem richtig gelöst anzusehen ist, wenn nicht vollkommen beliebige Funktionen, und daher auch unstetige, in die Lösung eingeführt worden sind. Diese Teile der Analysis sind freilich immer noch kaum entwickelt, auch wenn man überall verstreut außerordentliche Beispiele findet, auch wenn deren wahre Beschaffenheit nicht hinreichend klar scheint. Daher, damit ich diese Beschaffenheit deutlich darstelle, ist es notwendig, dass ich diese verschiedenen und unterschiedlichen Anteile der Analysis genauer beschreibe und sie nach deren Beschaffenheit voneinander abgrenze. So wie nämlich für gewöhnlich die Analysis des Unendlichen definiert zu werden pflegt, kann daher kaum etwas an Erkenntnis für die Illustration dieses Gegenstandes entnommen werden, weil sehr viele Definitionen meistens sehr vage und diffus sind, und sie auch die Natur des Gegenstands, worüber gehandelt wird, nicht hinreichend prägnant erläutern. Daher werden die häufigsten Beschwerden, dass die Idee der Analysis des Unendlichen niemals genau beschrieben und festgelegt worden ist, nicht unbegründet; hier ist aber besonders jenem Fehler zu begegnen, in welchem die verschiedenen Teilbereiche dieser Wissenschaft nicht hinreichend sorgfältig voneinander abgegrenzt werden.

§7 Aber das ganze Wesen der Analysis des Unendlichen wird am trefflichsten aus dem Begriff und der Natur von Funktionen erklärt, welche am gefälligsten nach der Anzahl an variablen Größen, durch welche sie auf gewisse Weise bestimmt werden, in Klassen eingeteilt werden. So wird die erste Klasse Funktionen einer einzigen variablen Größe enthalten. Solche Funktionen sind die Ordinaten von Kurven, in Bezug auf die Abszissen. Nachdem also die Abszisse $= x$ und die Ordinate $= y$ gesetzt worden ist, wird y eine Funktion der Variable x sein, deren Natur durch die Kurve, oder die Gleichung, welche zwischen x und y gegeben ist, ausgedrückt wird; durch diese kommt es, dass sobald der Abszisse x ein bestimmter Wert zugeteilt wird, auch die Ordinate y einen bestimmten Wert erhält, ob er ein einfacher oder ein multipler, oder sogar imaginärer war; daher sieht man ein, dass auch umgekehrt die Abszisse x als Funktion der Ordinate y angesehen werden kann. In gleicher Weise, wenn ein Körper über eine gewisse Linie bewegt wird, ist seine Geschwindigkeit an den einzelnen Stellen auch zu Funktionen einer einzigen Variable zu zählen; denn sie ist natürlich die Funktion einer variablen Größe, mit welcher die Punkte seiner Bahnkurve stetig beschrieben werden. In dieser Klasse sind die meisten bisher behandelten Fragen zu verorten, auch wenn des Öfteren mehrere Variablen in die Rechnung eingehen, weil ja schließlich alle durch eine einzige bestimmt werden. Denn wenn eines Beispiels wegen die Bahn des Mondes untersucht wird, wird zu einer bestimmten Zeit sein Breitengrad, Längengrad und Abstand von der Erde als zu ermitteln vorgelegt; weil aber diese einzelnen Elemente schließlich allein über die Zeit bestimmt werden müssen, so der Längengrad wie der Breitengrade und auch der Abstand, wird jede per se als Funktion der Zeit, und daher als die einer Variable, betrachtet werden können.

§8 Aber Funktionen von zwei oder mehr variablen werden durch zwei oder mehr Variablen von dieser Art bestimmt, welche voneinander in keiner Weise abhängen, sondern jeder von ihnen lassen sich jeweils völlig beliebige Werte zuteilten. Solche Funktionen treten auf, wannimmer die Natur von Festkörpern und Oberflächen untersucht wird. Dies pflegt aber durch die drei Koordinaten x, y und z zu geschehen, von welchen die beiden x und y in einer gewissen Ebene angenommen werden, die dritte z hingegen senkrecht zu dieser Ebene zur Oberfläche hin konstruiert wird. Weil also jedem Punkt der Basis, welcher durch die zwei Variablen x und y bestimmt ist, eine gewisses Lot übersteht, wird z natürlich eine Funktion der beiden voneinander in keinster Weise abhängenden Variablen x und y sein. Wenn wir nämlich alle Punkten der Oberfläche angeben wollen, müssen so x wie y jeweils vollkommen alle Werte zugeteilt werden, dass auf diese Weise für alle Punkte der Basis jene Senkrechten erhalten werden. Weiter, wenn ein Körper aus heterogenen Teilchen zusammengesetzt ist, dass jedem innerhalb des Körpers angenommenen Punkt seine eigene Dichte zukommt, wird zuerst freilich die Lage eines jeden Punktes mit den drei Koordinaten x, y und z bestimmt, die in keinster Weise voneinander abhängen, weil ja, damit alle Punkte innerhalb des Körpers erhalten werden, diesen Koordinaten gänzlich alle Werte nacheinander zugeteilt werden müssen. Wenn also die Dichte in einem gewissen Punkt mit der Größe v bezeichnet wird, muss sie als Funktion der drei Variablen x, y und z betrachtet werden. und wenn die Teilchen dieses Körpers von irgendeiner Bewegung angeregt werden, wird die Bewegung eines jeden Punktes nicht nur von seiner mit den drei Koordinaten zu bestimmenden Lage sondern auch von der Zeit abhängen, woher die Bewegung als Funktion von vier Variablen betrachtet werden müssen wird.

§9 Nachdem dieser Begriff und diese Einteilung von Funktionen gebildet worden ist, werden die Grundlagen der Analysis des Unendlichen sehr deutlich angegeben werden können, welche Disziplin auf die angenehmste Weise in so viele Teile aufgeteilt wird wie Klassen von Funktionen gegeben sind, weil die einzelnen auf eigenen Vorschriften und Lehren zu fußen sind. Also besteht der erste Teil, welcher bis jetzt fast ausschließlich entwickelt worden ist und auf welchen die Prinzipien der Differentialrechnung und der Integralrechung hauptsächlich angewandt worden ist, in Funktionen einer Variable. Zuerst also, wenn y eine beliebige Funktion einer einzigen Variable x war, pflegen die Inkremente oder Dekremente jener Funktion y betrachtet zu werden, während die Größe x um eine beliebige Größe wächst. Darauf wird diese Zunahme aufgefasst ununterbrochen vermindert zu werden, bis sie schließlich völlig verschwindet, in welchem Fall freilich auch das Inkrement von y in Null übergeht; obwohl diese verschwindenden Zuwächse Differentiale genannt werden, ist es ersichtlich, dass sie alle keine echte Größe haben und daher gleich Null sind, sodass über deren Größe keine Frage aufkommen kann. Und auch ist die Differentialrechnung nicht von der Ermittlung der Größe der Differentiale, welche ja nicht vorhanden ist, eingenommen, sondern von der Bestimmung von deren Verhältnissen zu einander, welches Verhältnis natürlich eine gewisse Größe hat. Natürlich wird von der Funktion y nicht so das Differential dy selbst wie sein Verhältnis zum Differential dx untersucht, nämlich der Wert des Bruchs $\frac{dy}{dx}$, welcher in jedwedem Fall eine bestimmte Größe erhält und selbst als neue Funktion von x betrachtet werden kann.

§10 Weil vielen diese Auffassung von Differentialen und die Ermittlung des Verhältnisses, welches zwischen den verschwindenden Größen einhergeht, höchst verdächtig zu erscheinen pflegt, werden alle Zweifel mit einem einzigen Beispiel verschwinden. Es sei also eine solche Funktion $y = axx + bx + c$ vorgelegt worden, und zuerst wollen wir sehen, ein wie großen Zuwachs diese Funktion nimmt, während der Größe x irgendein Zuwachs ω zugeschrieben wird; nachdem aber $x + \omega$ anstelle von x gesetzt worden ist, geht unsere Funktion in $axx + 2ax\omega + a\omega\omega + bx + b\omega + c$ über, und erhält daher ein Inkrement $= 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$, welches wir mit diesem Symbol Δy bezeichnen wollen, und analog werde die Größe ω, als Zuwachs von x, auch mit dem Zeichen Δx bezeichnet. Weil also

$$\Delta x = \omega \quad \text{und} \quad \Delta y = 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$$

ist, wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b$$

sein, und zu hat man das Verhältnis zwischen den Inkrementen Δx und Δy, welches wahr ist, einen wie großen Zuwachs ω auch immer die Größe x erhält; also wird dasselbe Verhältnis mit der Wahrheit einhergehen, wenn der

Zuwachs ω als vollkommen verschwindend angenommen wird, in welchem Fall jene Inkremente Δx, Δy mit diesen Zeichen dx und dy notiert und Differentiale genannt zu werden pflegen; daher ist es ersichtlich, dass nach Setzen von $\omega = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

hervorgeht, und dass dieses Verhältnis wahr ist, auch wenn die Terme, zwischen welchen es besteht, verschwindende sind. Allein dieses Beispiel scheint zu genügen alle Zweifel, mit welchen für gewöhnlich die übliche Idee des unendlich Kleinen in der angegriffen zu werden pflegt, zu zerstreuen und dieses Kalkül von jedem Verdacht freizumachen.

§11 Weil dieses Verhältnis von Differentialen $\frac{dy}{dx}$ erneut eine Funktion von x ist, wenn sie mit dem Buchstaben p angezeigt wird, wird das Verhältnis ihres Differentials dp zu dx, oder der Bruch $\frac{dp}{dx}$ in gleicher Weise bestimmt werden, welches, damit es nicht nötig ist einen neuen Buchstaben in die Rechnung einzuführen, wegen $p = \frac{dy}{dx}$ mit einem solchen Zeichen $\frac{ddy}{dx^2}$ bezeichnet zu werden pflegt, welches Differentiale zweiten Grades zu beinhalten gesagt wird; und indem man so weiter fortschreitet, werden die in diese Formeln $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. eingehenden Differentiale von dritter, vierter und höherer Ordnung genannt, deren Bedeutung, wie ich es für die erste Ordnung gezeigt habe, immer auf ein Verhältnis zwischen Differentialen von zwei Größen, von denen die eine eine Funktion der anderen ist, zurückgeführt wird. Und auf diese Weise fallen alle Kontroversen, welche einst über die Differentiale von allen Ordnungen und deren Natur entstanden worden sind, in sich zusammen, weil das, was auch immer in diesem Kalkül definiert wird, immer auf das Verhältnis von Differentialen, deren Realität keinerlei Zweifeln unterworfen ist, zurückgeführt wird; und die mit diesem Kalkül gefundenen Wahrheiten werden von den Geometern nicht in irgendeiner Weise anzufechten sein. Ich für meine Person stelle es nicht in Abrede, dass in dieser Disziplin Redensarten von solcher Art entstanden sind, welche den Differentialen eine gewisse sehr kleine Größe zuzuschreiben scheinen, aber weil deren Deutung immer aus den aufgestellten Prinzipien heraus zu geben ist, können solche Sprechweisen, auch wenn sie etwas unpassend sind, toleriert werden. Ja, weil der Ausdruck $p = \frac{dy}{dx}$ völlig real ist, wird auch diese Gleichheit $dy = pdx$ mit Recht zugelassen, obschon auf keiner der beiden Seiten irgendeine Größe anerkannt wird.

§12 Also ist die Definition des Differentialkalküls nicht weiter von irgendwelchen Schatten umhüllt, nach welcher es als die Methode bezeichnet wird, nach Vorlage irgendeiner Funktion einer oder mehrerer Variablen, die Verhältnisse, die zwischen den Differentialen so erster wie höherer Ordnungen bestehen, ausfindig zu machen. Für Funktionen von einer Variable, welche allein ich bis jetzt hier betrachtet habe, ist diese Definitionen höchst offensichtlich; wenn nämlich y eine beliebige Funktion von x war, lehrt das Differentialkalkül, auf welche Weise der Wert des Bruchs $\frac{dy}{dx}$ zu finden ist und dieselbe Regel, mit welcher dies geleistet wird, wird auch für die höheren Differentiale gelten, weil, nach Setzen von $\frac{dy}{dx} = p$, aus dieser Funktion von x mit derselben Methode auch der Wert $\frac{dp}{dx}$ oder $\frac{ddy}{dx^2}$ erhalten wird, und wenn weiter $\frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = q$ gesetzt wird, ebenso $\frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r$, dann $\frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s$ etc., reicht dieselbe Methode aus, all diese Werte q, r, s etc. ausfindig zu machen; und hierauf sind all diese Dinge zu übertragen, die für gewöhnlich über das Differenzen-Differential und Differentiale höherer Ordnungen angegeben zu werden pflegen, welche, wenn sie entsprechend verstanden werden, überhaupt nichts enthalten, was den ersten Prinzipien unserer Erkenntnis widerspricht. Wannimmer auch in den Elementen des Differentialkalküls öfter mehrere Variablen auftauchen und die Lehren zu den Teilen, welche ich als die folgenden festlege, zu zählen scheinen, wird dennoch immer ein gewisser Zusammenhang zwischen ihnen zugelassen, dass schließlich alle als Funktionen einer einzigen Variable angesehen werden können. Dennoch weichen indes die Regeln des Differenzieren der folgenden Teile nicht von denen des ersten ab.

§13 Ich definiere aber das Integralkalkül im Allgemeinen so, dass es sie Methode ist, die Natur von Funktionen aus einer beliebigen Relation der Differentiale zu finden; diese Definition möchte ich für den Fall von Funktionen einer einzigen Variable genauer entwickeln, bevor ich zu Funktionen mehrerer Variablen übergehen werde. Nachdem natürlich für die Funktion einer Variable $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ etc. gesetzt worden ist, wenn irgendeine Gleichung vorgelegt worden ist, in welche, außer den Größen x und y, auch diese aus den Differentialen entspringenden p, q, r etc. eingehen, besteht die Aufgabe dieses Kalküls darin, dass aus dieser Gleichung oder der gegebenen Relation der Differentiale die Natur der Funktion y, wie sie durch x bestimmt wird, ermittelt wird; diese Operation pflegt Integration genannt zu werden.

Es fehlt aber noch sehr viel daran, dass diese Methode hinreichend ausgebaut ist, und wenn wir alle ihr zufallenden Fragen betrachten, lassen sich die wenigsten mit ihrer Hilfe auflösen; sie, soweit wie sie entwickelt ist, ist aber in verschieden Vorschriften für die Ordnung der Differentiale enthalten, welche in die gegebene Relation eingehen. Wenn also eine beliebige Relation zwischen den Größen x, y und $p = \frac{dy}{dx}$ vorgelegt wird, welche Gleichung eine Differentiagleichung vom ersten Grad genannt wird, gelingt freilich in sehr vielen Fällen die Integration; wenn die Relation aber darüber hinaus die Größe q beinhaltet, wird die Gleichung eine Differentialgleichung zweiten Grades genannt, und es sind zwei Integrationen vonnöten, bevor man zur gewünschten Relation zwischen x und y gelangt, woher die Natur dieser Funktion y bekannt wird. Hier sind um vieles weniger Fälle bekannt, in denen sich zum Ziel gelangen lässt; und zugleich ist klar, was über Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnungen zu urteilen ist.

§14 Aber über diese Integrationen, welche nur zum Finden von Funktionen einer einzigen Variablen dienen, ist eine gewisse einzigartige Eigenschaft, in welcher die grundlegende Natur dieser Methode enthalten ist, sorgsam festzuhalten. Diese Eigenschaft besteht aber darin, dass die integrierte Gleichung immer eine gewisse neue konstante Größe beinhaltet, von welcher in der Differentialgleichung nicht einmal eine Spur zu finden ist; weiter ist anzumerken, dass diese konstante Größe völlig unserem Belieben überlassen ist. Wenn man also diese Differentiagleichung hat

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \quad \text{oder} \quad dy = 2axdx + bdx,$$

wo freilich die Buchstaben a und b gegebene konstante Größen bezeichnen, verhält sich die Integralgleichung in voller Allgemeinheit so:

$$y = axx + bx + C,$$

wo C eine vom Vorgehenden keineswegs abhängige Größe bezeichnet, und deren Wert völlig unserem Belieben überlassen bleibt, und die Integration einer gewissen Differentialgleichung ist nicht für vollständig zu halten, wenn nicht eine gewisse beliebige Konstante Größe eingeführt worden ist. In gleicher Weise, wenn die vorgelegte Relation Differentiale zweiten Grades beinhaltet, weil ja zwei Integrationen vonnöten sind, muss die vollständige Lösung zwei beliebige Größen von solcher Art enthalten; drei Konstanten von solcher Art werden hingegen verlangt, wenn Differentialgleichungen dritter Ordnung vollständig aufgelöst werden. Über diese Konstanten ist aber besonders zu bemerken, dass sie mit der Natur der Probleme in sehr engen Zusammenhang stehen und alle Probleme, deren Auflösung zu Differentiagleichungen geführt wird, so beschaffen sind, dass nach vollführter Integration jene eingegangenen Konstanten aus der Natur der Sache und den entsprechenden Umständen ihre Bestimmung erfahren.

§15 In dem bisher Erläuterten besteht also der erste Teil der Analysis des Unendlichen, welcher von Funktionen nur einer einzigen Variable handelt, und daraus wird viel leichter verstanden werden, was über die übrigen Teile, in deren die Funktionen zwei oder mehr Variablen haben, festzuhalten ist. Bei den Differentialen wird aber schon eine andere Natur entdeckt, weil sie sich hier nicht uneingeschränkt miteinander vergleichen lassen. Wenn nämlich z irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y war, ist über die Differentiation eine zweiteilige Frage zu stellen: Zuerst wird das Differential von z gesucht, während, solange y denselben Wert behält, die andere Variable x um ihr Differential dx vermehrt wird, dass daher der Bruch $\frac{dz}{dx}$ erhalten wird; nachdem in gleicher Weise x wie eine konstante behandelt worden ist, wird die andere y angenommen einen Zuwachs dy zu nehmen, und nachdem daher das Inkrement dz berechnet worden ist, um welches die Funktion z vermehrt werden wird, drückt der Bruch $\frac{dz}{dy}$ das differentielle Verhältnis, welches aus der Veränderlichkeit von y allein entsteht, aus. Aber jeder dieser beiden Brüche $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, wie im vorhergehenden Fall, wird in lediglich endlichen Ausdrücken enthalten sein, und die beiden werden als neue Funktionen der zwei Variablen x und y angesehen werden können. Nachdem aber diese zwei Werte gefunden worden sind, wird die wahre Natur des Differential der vorgelegten Funktion z erkannt; denn erst aus ihnen zusammen wird klar, wie sich das Differential von z in Bezug auf die Veränderlichkeit jeder der beiden Variablen x und y verhält. Diese Unterscheidung erfordert die Natur der Sache, ohne welche das Wesen der Differentiation von Funktionen von dieser Art nicht einmal verstanden werden könnte, welche aber nun per se offenkundig ist.

§16 Was auch immer sich also auf die Differentiation von Funktionen zweiter Variablen bezieht, das wird gänzlich auf diese beiden Formeln $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zurückgeführt, deren Werte in jedwedem Fall in endlichen Größen mit den beiden Variablen x und y ausgedrückt werden. Damit aber Brüche von dieser

Art nicht mit den vorhergehenden vermischt werden, pflegen sie auf diese Weise in Klammern eingeschlossen zu werden

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Wenn wir also diese Brüche mit den Buchstaben p und q bezeichnen, wird natürlich

$$dz = pdx + qdy$$

das vollständige Differential der Funktion z sein, und weil ja p und q wiederum als Funktionen von x und y angesehen werden können, sieht man auch ein, was diese Formeln meinen:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \ \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right), \ \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right) \ \text{und} \ \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right),$$

welche die Differentiale zweiten Grades in sich umfassen, und in gleicher Weise geschieht der Übergang zu Differentialen höherer Ordnungen. Nachdem also irgendeine Funktion z der beiden Variablen x und y vorgelegt worden ist, wird das Differentialkaklül Regeln vorschreiben, mit welchen die Werte all dieser Differentialformeln gefunden werden können; zuerst natürlich die ersten Grades, welche

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

sind, dann die zweiten Grades, welche

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{ddz}{dxdy}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

sind, weiter die dritten Grades, welche

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \quad \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right), \quad \left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right), \quad \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

sind und so fort. Hier ist freilich anzumerken, dass diese Methode diese Formeln zu bestimmen sich vom ersten Teil nicht unterscheidet, weil in jeder Differentiation nur eine Größe als Variable behandelt wird. Es wäre überflüssig, diese selben Grundzüge für Funktionen von drei oder mehreren Variablen darzustellen, welche natürlich aus dem schon Erwähnten ersichtlich sind.

§17 Aber die Aufgabe des Integralkalküls besteht darin, dass nach Vorlage einer beliebigen Relation zwischen x, y, z und den gerade erwähnten Differentialformen daher die Natur der Funktion z, wie sie aus den Variablen x und y zusammengesetzt ist, ausfindig gemacht wird. Aber jene gegebene Relation wird mit einer Gleichung ausgedrückt, die, wenn nur Differentialformen der ersten Ordnung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

außer den Größen x, y und z umfasst, eine Differentialgleichung ersten Grades genannt wird; wenn aber in sie darüber hinaus Differentiale der zweiten Ordnung

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{ddz}{dxdy}\right), \quad \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

oder weiter von dritter order höherer Ordnungen eingehen, dann wird jene Gleichung entsprechend als eine von derselben Ordnung bezeichnet. Und dies ist die allgemeine Form des Integralkalküls, sofern es von Funktionen zweier Variablen eingenommen ist; daher wird zugleich eingesehen, wie die übrigen Bereiche der Analysis des Unendlichen, in welchen drei oder mehr Variablen behandelt werden, zu definieren sind. Aber das auf Funktionen von zwei Variablen angewandte Integralkalkül unterscheidet sich wesentlich vom gemeinen, wo nur Funktionen von einer Variable auftreten, und erfordert völlig einzigartige Lehrsätze, zusätzlich dazu dass in ihm alle Kunstgriffe des ersten Bereichs ebenfalls zu verwenden sind. Aber es ist nicht weit zurück liegend, dass dieser Bereich zu entwickeln begonnen worden ist, sodass bis jetzt kaum seine ersten Grundzüge gefunden worden sind. Freilich werden schon überall verstreut außerordentliche Beispiele für dieses Kalkül entdeckt, deren Behandlung aber weniger auf die Lehren des gemeinen Kalküls beschränkt ist; daher wird ein sehr weites Feld eröffnet, in welchem die scharfsinnigsten Geister zum größten Gewinn für die Wissenschaft ihre Kräfte erproben können werden.

§18 Aber die Natur und gleichsam das eigene Wesen dieses neuen Kalküls scheint immer noch keineswegs verstanden. Wie nämlich das Wesen des gemeinen Integralkalküls darin besteht, dass in jedweder Integration eine neue unserem Belieben überlassende Konstante in die Rechnung eingeführt wird, so geht in diesem Teil, welcher von Funktionen zweier Variablen eingenommen ist, in den einzelnen Integrationen nicht nur eine neue konstante Größe, sondern sogar eine neue völlig unbestimmte Funktion einer Variable in die Rechnung ein, welche so von unserem Belieben abhängen wird, dass an ihrer Stelle sogar unstetige Funktionen angenommen werden können. Daher wird die Verwendung von unstetigen Funktionen von dieser nahezu neuen Art von Kalkül nicht nur nicht ausgeschlossen, sondern es ist sogar quasi zu beurteilen, sich essentiell auf seine Natur zu erstrecken; und in diesem Kalkül ist sogar eine Integration nicht für vollständig und ausgeführt zu halten, wenn nicht in die Integralgleichung von dieser Art eine völlig beliebige Funktion eingeführt worden ist; und wenn die vorgelegte Differentialgleichung von zweitem oder höherem Grad war, sodass zwei oder mehr Integrationen vonnöten sind, ist es notwendig, dass ebenso viele beliebige Funktionen in der Integralgleichung gefunden werden, wenn was nicht passiert, kann das Integral nicht mehr für vollständig gehalten werden als in dem gewöhnlichen Integralkalkül, sobald die Einführung von beliebigen Konstanten missachtet wird. Wannimmer aber von Funktionen von drei Variablen gehandelt wird, wird mit jeder beliebigen Integration eine beliebige Funktion von zwei Variablen in die Rechnung eingeführt; durch diesen Umstand wird dieses Kalkül von den vorhergehenden so abgegrenzt, dass es anzusehen ist eine eigene Art zu definieren, weil die Natur jedweder Art am gefälligsten aus der Beschaffenheit der durch Integration eingehenden beliebigen Größen heraus beurteilt wird. Aber wenn dann die Frage von Funktion von vier Variablen handelt, wird diese in jeder Integration einzuführende beliebige Größe eine Funktion drei Variablen und so weiter.

§19 Aber diese Erläuterungen sind keineswegs der Eigenart dieses Kalküls zuzuschreiben, welche keinen Nutzen haben und lediglich einer leeren Betrachtung dienen, sondern sie fußen viel eher auf der Natur der Sache und hängen in wunderbarster Weise mit tieferen Wahrheiten zusammen. Wie nämlich alle Probleme über Funktionen einer Variablen, von welcher Art fast alle sind, die bis jetzt in der Analysis behandelt worden sind, nicht vollständig gelöst sind, wenn nicht in jeder Integration eine konstante Größe eingeführt wird, welche anschließend aus den Bedingungen des Problems bestimmt werden muss, so sind auch alle Probleme, deren Lösung zu Funktionen von zwei Variablen geführt wird, in ihrer Natur so beschaffen, dass, wenn nicht in jedweder Integration eine beliebige oder unbestimmte Funktion einer Variable eingeführt werden würde, allen Bedingungen, die das Problem bestimmen, in keiner Weise Genüge geleistet werden könnte. Ein vorzügliches Beispiel für diese Tatsache wird im Problem über die schwingenden Saiten ausgemacht; wenn nämlich von einem Punkt einer Saite, welcher von dem einen Ende um eine Strecke $= x$ entfernt ist, für die verstrichene Zeit $= t$, die Entfernung von der Achse oder dem Gleichgewichtszustand $= z$ gesetzt wird, ist es ersichtlich, dass z eine Funktion der zwei Variablen t und x ist, weil ja dieser Abstand, so für die verschiedenen Punkte, wie für den Fluss der Zeit, variiert wird. Weil also für die Zeit $t = 0$ der Zustand der Saite hervorgehen muss, der selbigem am Anfang aufgeprägt worden ist, und wo der Abstand z einer gewissen gegebenen Funktion der Strecke x gleich war, kann die Lösung nicht vollständig sein, wenn sie nicht eine unbestimmte Funktion von dieser Art erfasst, die später aus dem Anfangszustand bestimmt werden kann; und weil ja dieser Zustand in solcher Weise völlig von unserem Belieben abhängt, dass der Saite irgendeine unregelmäßige und unstetige Form aufgeprägt werden konnte, muss sich jene durch die Analysis eingeführte Funktion auch soweit erstrecken, dass sie ebenfalls unstetige, oder vom Kontinuitätsgesetz abweichende, in sich umfasst.

§20 Damit hier aber nicht irgendein Zweifel bestehen bleibt, möchte ich ein Problem von solcher Art entwickeln, dessen Lösung sogar leicht aus den Elementen abgeleitet wird, und welche Lösung so beschaffen ist, dass in ihr unstetige Funktionen, oder nach Belieben gezeichnete Kurven, notwendig zugelassen werden müssen; weiter möchte dasselbe Problem auch analytisch behandeln, damit die Notwendigkeit beliebiger Funktionen, welche durch die Integration eingeführt werden, deutlicher hervortritt. Dieses Problem verhält sich aber so: *Alle Festkörper, zu deren Oberfläche in den einzelnen Punkten gezogene Normalen von derselben Größe sind, zu finden.* Wannimmer von Linien gesprochen wird, ist bekannt, dass außer dem Kreis keine Kurve gegeben ist, all deren Normalen einander gleich sind; aber wenn die Gleichheit der Normalen auf Festkörper erweitert wird, dass alle von einer gegebenen Ebene als Basis zur Oberfläche hin normal gezogenen Geraden einander gleich sein müssen, können unendlich viele Festkörper dargeboten werden, auf welche diese Eigenschaft zutrifft. Natürlich passiert dies offenkundig zuerst bei der Halbkugel, oder auch bei der Kugel, deren Mittelpunkt in jener Ebene oder jener Basis liegt, während alle normalen Geraden zugleich Radien der Kugel sind. Weiter, wenn ein Zylinder so platziert wird, dass seine Achse auf die Basis fällt, hat man auch lauter gleiche Normalen. Daher wird aber eine sich um vieles weiter erstreckende Lösung abgeleitet, weil ja unter Beibehalt dieser Eigenschaft die Achse des Zylinders auch auf beliebige Art gekrümmt werden kann, welche allgemeine Lösung sich so formulieren lässt. Nachdem über einer festen Ebene eine beliebige Kurve beschrieben worden ist, ob stetig oder unstetig, konstruiere man über ihr einen Festkörper von solcher Art, all dessen Schnitte, normal zu jener Kurve gemacht, Halbkreise seien, deren Mittelpunkte auf die Kurve selbst fallen. Wenn sich also die analytische Lösung nicht genauso weit erstreckt, dass sie eine nach belieben gezeichnete, oder, was auf dasselbe zurückgeht, eine unbestimmte Funktion in sich enthielte, könnte sie gewiss nicht für vollständig und vollendet gehalten werden.

§21 Nachdem also die beiden in der festen Ebene angenommenen Koordinaten x und y gesetzt worden sind, aber die sich von da aus zur gesuchten Oberfläche erstreckende Senkrechte $= z$, weil z als Funktion der zwei Variabelen x und y betrachtet wird, setze man die Differentialformeln

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

dass $dz = pdx + qdy$ ist. Daher wird aber die bis zur festen Ebene verlängerte Normale zur Oberfläche zu

$$= z\sqrt{1 + pp + qq}$$

berechnet; weil diese von konstanter Größe sein muss, setze man

$$z\sqrt{1 + pp + qq} = a$$

und für z muss eine Funktion der zwei Variablen x und y von solcher Art ausfindig gemacht werden, dass diese Bedingung, welche eine Differentialgleichung ersten Grades ist, erfüllt wird. Damit wir aber leichter zu einer Auflösung durch Integration gelangen, wollen wir diese Substitutionen verwenden: Es sei

$$p = \frac{\sin\Phi\cos\omega}{\cos\Phi} \quad \text{und} \quad q = \frac{\sin\Phi\sin\omega}{\cos\Phi},$$

dass

$$pp + qq = \frac{\sin^2\Phi}{\cos^2\Phi}$$

wird, und daher

$$\frac{z}{\cos\Phi} = a \quad \text{oder} \quad z = a\cos\Phi,$$

woher die angenommene Differentialgleichung in diese überführt wird:

$$-ad\Phi\sin\Phi = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}(dx\cos\omega + dy\sin\omega)$$

oder

$$-ad\Phi\cos\Phi = dx\cos\omega + dy\sin\omega,$$

weil hier der erste Teil eine Integration zulässt, ist auch der zweite Teil integrierbar zu machen, von welcher Bedingung eine gewisse Relation zwischen x, y und ω definiert wird. Weil wir also durch Integrieren erhalten:

$$-a\sin\Phi = x\cos\omega + y\sin\omega - \int d\omega(y\cos\omega - x\sin\omega),$$

ist es ersichtlich, dass dieses Integral nur dargeboten werden kann, wenn $y\cos\omega - x\sin\omega$ eine Funktion der einen Variable ω war. Man setze also

$$y\cos\omega - x\sin\omega = F' : \omega,$$

dass

$$\int d\omega(y\cos\omega - x\sin\omega) = F : \omega$$

wird, und es wird

$$-a\sin\Phi = x\cos\omega + y\sin\omega - F : \omega$$

sein. Oder es bezeichne Ω irgendeine wie auch immer unbestimmte Funktion von ω, dass auch unstetige Funktionen davon nicht ausgeschlossen werden, und für $F' : \omega = \Omega$ gesetzt wird $F : \omega = \int \Omega d\omega$ sein, und die Lösung des Problems ist wegen $a\sin\Phi = \sqrt{aa - zz}$ in diesen Gleichungen enthalten:

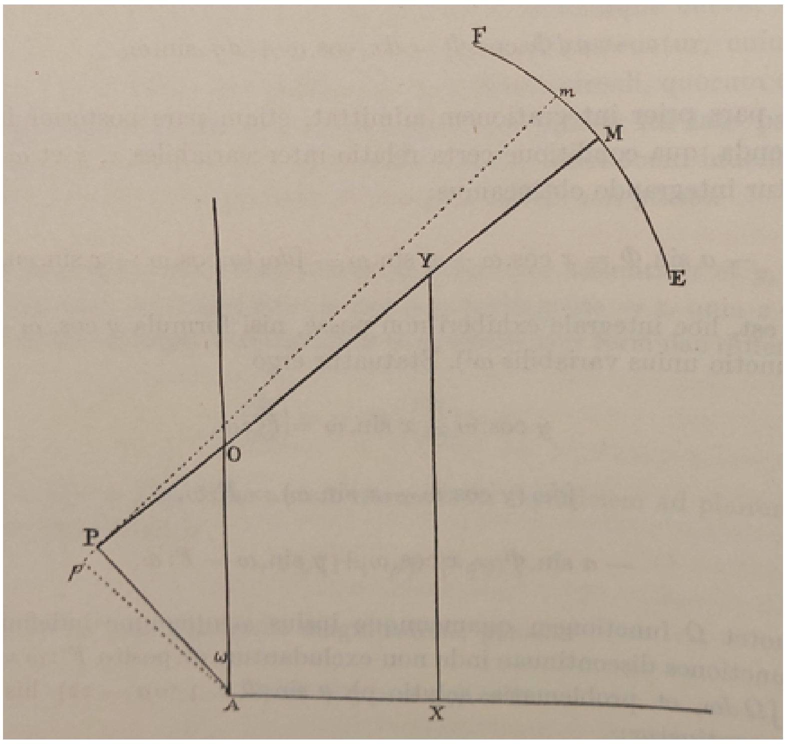
$$y\cos\omega - x\sin\omega = \Omega \quad \text{und} \quad \sqrt{aa - zz} = \int \Omega d\omega - x\cos\omega - y\sin\omega,$$

wo freilich das Wurzelzeichen gleichermaßen positiv wie negativ genommen werden kann.

§22 Wir wollen aber sehen, auf welche Weise diese Formeln in eine Konstruktionsbeschreibung überführt werden können. Die Tischebene stelle jene Ebene dar, welche die feste Basis des gesuchten Körpers bildet, in welcher (siehe Figur) die zwei Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$ seien, sodass dem Punkt Y orthogonal die dritte Koordinate z übersteht. In dieser Ebene füge man der Achse AX normal die Gerade AO an und zeichne die Gerade AP, sodass der Winkel $OAP = \omega$ ist, zu diesen ziehe man von Y aus die Normale YP, und es wird

$$AP = y\cos\omega - x\sin\omega \quad \text{und} \quad PY = y\sin\omega + x\cos\omega$$

sein.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Nachdem diese Linien in die Rechnung eingeführt worden sind, werden sich unsere beiden Gleichungen so verhalten:

$$AP = \Omega \quad \text{und} \quad PY + \sqrt{aa - zz} = \int \Omega d\omega.$$

Man verlängere also die Gerade PY zu M, dass $YM = \sqrt{aa - zz}$ und deshalb $OM = \int \Omega$ ist, welche Relation zwischen den Linien AP und PM sorgsam zu betrachten ist. Weil nun in einer unendlich nahen Lage, nachdem natürlich der Winkel OAP um sein Differential $PAP = d\omega$ vermehrt worden ist, der mit dem Radius AP beschriebene Bogen $Pp = \Omega d\omega$ ist, wird dieser Bogen zugleich das Differential der Linie MP darbieten, sodass $pm = PM + Pp$ ist, woraus man einsieht, dass die Gerade PM an dem einen Ende M gegen eine Kurve EMF solcher Art begrenzt ist, zu welcher sie stets normal ist, in welcher Eigenschaft unsere ganze analytische Lösung enthalten ist. Deshalb wird die gesuchte Konstruktion so beschaffen sein: Nachdem nach Belieben irgendeine Kurve EMF gezeichnet worden ist, welche entweder stetig sei oder mit keiner festen Gleichung beschrieben ist, zeichne man zu ihren einzelnen Punkten M die Normalen MP, die zu beiden Seiten zu verlängern sind, und von den einzelnen Punkten Y dieser Geraden aus konstruierte man vertikal die Senkrechten $YZ = z$, dass $YZ^2 + MY^2 = aa$ ist, was geleistet werden wird, wenn in den einzelnen Mittelpunkten M mit dem Radius $= a$, welchem alle Normalen gleich sein müssen, Kreise in den zur Basis und der Kurve EMF normalen Ebenen beschrieben werden; denn die Oberflächen dieser Kreise werden auf der Oberfläche des gesuchten Körpers selbst liegen, und die zu diesen Oberfläche normalen Geraden werden alle $= a$ sein, und auf die nach Belieben gezeichnete Linie EMF fallen.

§23 Aber auch unter Aufbringen von geringer Aufmerksamkeit ist es ersichtlich, dass diese aus der analytischen Lösung entnommene Konstruktion völlig mit der oberen Konstruktion übereinstimmt, welche die Betrachtung der Elemente allein an die Hand gegeben hatte. Es ist nämlich offensichtlich, dass der Körper so beschaffen sein wird, dass all seine Schnitte, die normal zur Linie EMF gemacht worden sind, einander gleiche Kreise sind, die die Mittelpunkte auf dieser Linie selbst haben. Aber wegen der Übereinstimmung der beiden Lösungen ist besonders dies zu bemerken, dass die analytische Lösung nicht vollständig gewesen wäre, wenn die durch Integration eingebrachte Funktion Ω sich nicht sehr weit erstrecken würde, und sogar ganz und gar alle Werte, stetige wie unstetige, in sich umfassen würde, weil ja jene Linie EMF, die der Funktion Ω entspricht, völlig unserem Belieben überlassen wird, dass auch freihändig gezeichnete Kurven verwendet werden können. Was aber von diesem Problem gezeigt worden ist, gilt zugleich auch für alle anderen derselben Art, deren Lösung natürlich Funktionen von zwei Variablen verwickeln, woher die eingangs vorgelegte Frage über die Nützlichkeit von unstetigen Funktionen in der Analysis so aufgelöst worden ist, dass Funktionen von dieser Natur freilich in der gemeinen Analysis, welche nur von Funktionen einer Variable handelt, Funktionen von dieser Art kein Platz einzuräumen ist, aber in den Zweigen der höheren Analysis, wo Funktionen von zwei oder mehreren Variablen behandelt werden, solche Funktionen anzusehen sind sich so notwendig auf die Essenz dieses Kalküls zu beziehen, dass keine Integration für durchgeführt und vollständig gehalten werden kann, wenn nicht zugleich eine höchst unbestimmte Funktion, und so auch eine unstetige, in die Rechnung eingeführt wird.